

Le baguenaudier

L'approche classique
et

L'approche I.A.



Le baguenaudier

Aussi appelé *Meleda Puzzle* ou *anneaux chinois*.

Une légende attribue son invention au soldat Hung Ming (181-234), qui en aurait confié la résolution à son épouse pour l'occuper pendant qu'il était parti faire la guerre.

La première mention connue du baguenaudier date du milieu du XVI^e siècle, sous la plume du mathématicien Jérôme Cardan (1501-1576), qui décrit le baguenaudier dans son *De subtilitate libri XXI*, paru à Nuremberg en 1550.

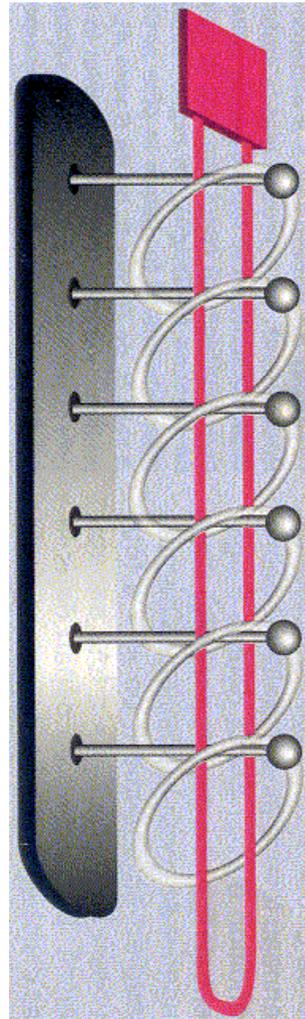
Il y précise : "cela de soi est inutile ; toutefois on peut le transférer aux serrures artificieuses¹⁰ de coffres".

Effectivement, en Norvège, des sacs de voyage ont été équipés d'une fermeture utilisant le principe du baguenaudier. On peut craindre que ces serrures ne se soient révélées agaçantes, par exemple lorsque le propriétaire, pris d'une soudaine envie d'éternuer, désirait y saisir un mouchoir ...

Pour résoudre le baguenaudier, la méthode proposée pour le spin-out s'applique presque mot à mot. On constate d'abord que le dernier anneau peut toujours être abaissé ou levé et que le seul autre anneau qui accepte de se déplacer est celui qui précède l'anneau levé le plus à droite – et cela à condition d'avoir tiré la double tringle possible.

La seule règle à appliquer pour résoudre ce casse-tête est : "déplacer alternativement l'anneau le plus à droite et l'anneau mobile le plus à gauche, que l'on identifie en tirant au maximum la double tringle centrale.

Il nous semble avoir déjà vu cette règle quelque part !?



Pour résoudre ce baguenaudier à 6 anneaux, 63 mouvements sont nécessaires : les 63 premiers (ou derniers) de la résolution de la tour de Hanoi

Éléments d'Informatique

Informatique et démarche de l'esprit

Charles Corge

Larousse
Université.

L'approche Classique

1.8. Le jeu du baguenaudier, le système binaire et le code Gray

Il est un jeu fort ancien, oublié aujourd'hui, à peine cité dans les dictionnaires, auquel le lecteur est invité à s'exercer. D'après E. Lucas [1,7], il fut mentionné pour la première fois par J. Cardan dans son ouvrage intitulé : *De subtilitate rerum libri XXI*. Ce jeu s'appelle le baguenaudier. En voici la description telle qu'elle apparaît dans une traduction française de 1556 :

« L'instrument, composé de sept anneaux, est inutile et est tel : une paillette de fer large d'un doigt, longue d'une paume, mince et délicate, en laquelle sont sept trous ronds, estrois et d'espaces égales, disposés selon la longueur de la paillette ou lamine : ces trous reçoivent sept vergettes menues presque de la hauteur d'une once, mobiles en bas, circonflexes en haut, à fin qu'elles retiennent les anneaux enclôs de la grandeur d'un doigt, et les vergettes sont contenues par l'anneau ensuivant sous le fléchissement et courbure. Pour cette cause, tous les anneaux, excepté le premier, sont engagés par le précédent, qui ne saute librement hors de la verge antérieure : tout est de fer, et mesmement la navette ou navicule est de fer, de laquelle j'ai exactement rendu la figure que voici présente. Elle est longue et large selon la grandeur de la paillette ou lamine supposée. Par cet instrument un jeu est inventé de subtilité admirable. »

Mais peut-être n'êtes-vous pas davantage éclairé sur la subtilité de ce jeu après lecture du texte qui précède, même si vous vous y êtes repris à deux fois pour mieux vous en pénétrer.

En fait le baguenaudier comporte essentiellement deux parties : la navette et le système des anneaux, comme le montre la figure 1,7.

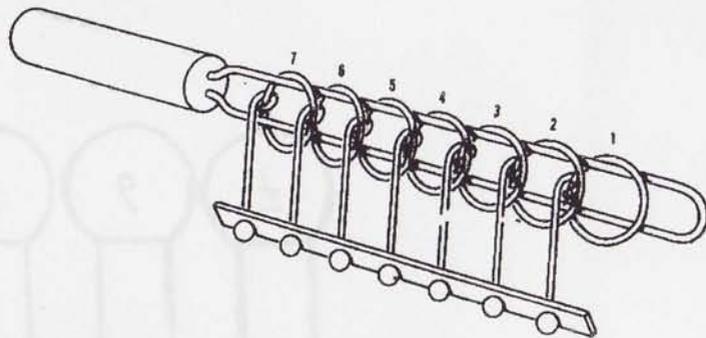


Fig. 1,7. Un baguenaudier.

La navette est faite d'une tringle double terminée en son extrémité par une poignée qui permet de la tenir d'une main alors que de l'autre on manipule les anneaux. Le système des anneaux, quant à lui, compte un nombre quelconque d'éléments annulaires, tous identiques et de diamètre suffisamment grand pour qu'on puisse les enfiler facilement sur la navette. Il leur est associé une petite planchette rectangulaire de même dimension que la navette, percée sur sa longueur d'autant de trous équidistants qu'il y a d'anneaux ; par chaque trou passe une petite tige fine, ou vergette, empêchée d'échapper à l'autre planchette par une petite boule d'arrêt. Chaque vergette est façonnée à l'autre bout en forme de crochet fermé qui se boucle sur un anneau.

En l'état initial le baguenaudier est monté. On entend par là que tous les anneaux, repérés par leurs numéros d'ordre respectifs allant croissant de droite à gauche, se trouvent enfilés sur la navette dont nous supposons la poignée située à gauche. La vergette du premier anneau, solidaire de celui qui est le plus éloigné de la poignée, est engagée dans la navette entre les deux tiges et passe à travers le deuxième anneau. Et, d'une manière générale, toute vergette d'un anneau solidaire de celui-ci est engagée dans la navette entre les deux tiges et passe à travers l'anneau voisin de rang immédiatement supérieur, sauf évidemment celle du dernier anneau qui ne passe à travers aucun autre.

Dans cette position les anneaux sont dits levés ou encore montés. Le jeu consiste alors à les baisser tous, ou à les descendre tous, c'est-à-dire à les libérer de la navette de sorte qu'en l'état final où le baguenaudier est réputé démonté, la navette se trouve complètement séparée du système des anneaux.

Il est aisé de baisser l'anneau extrême de rang un en très peu de gestes. Voici comment. Tenant de la main gauche le baguenaudier par sa poignée, de manière à ce qu'il soit horizontal devant vous, vous maintenez immobile entre le pouce et l'index de la main droite l'anneau que vous voulez descendre, tandis que vous faites glisser la navette comme pour la retirer du système des anneaux, jusqu'à ce que le premier d'entre eux paraisse dégagé ; puis, pour le libérer complètement de la navette dont il est encore prisonnier par sa ver-

gette, vous le passez entre les tiges de la première pour que lui et sa vergette se retrouvent du même côté de la navette. Dès lors si vous lâchez l'anneau 1, il ne se trouve plus maintenu que par l'anneau 2. Il est baissé.

Une fois l'anneau 1 baissé, vous pouvez être tenté de recommencer la même manœuvre pour l'anneau 2. Hélas, vous constaterez vite que vous ne pouvez pas le faire. En revanche vous pourrez baisser l'anneau 3. Mais si vous le faites, vous vous trouverez en fâcheuse posture car vous ne pourrez alors en baisser aucun autre, et la seule chose qui vous restera à faire sera de remonter les deux anneaux pour vous retrouver en l'état initial^c. tenter une autre approche.

Au prix d'essais répétés servant, en l'occasion, d'émonctoire naturel à un entêtement sans bornes et patient, ou récoltant les fruits d'une méditation pleine de sagesse et de logique, selon votre tempérament, vous ne manquerez pas, probablement, de dégager les deux règles ci-après qui gouvernent tout changement d'état d'un anneau.

● Quelle que soit la position des anneaux du baguenaudier, il est toujours possible de baisser (resp. lever) le premier anneau s'il est levé (resp. baissé).

● Pour qu'un anneau de rang quelconque puisse être levé ou baissé, il faut et il suffit que l'anneau de rang immédiatement inférieur soit monté et que ce soit le seul ; autrement dit, compte tenu que vous présentez le baguenaudier poignée à gauche, il faut et il suffit qu'il n'y ait qu'un seul anneau monté à sa droite et que ce soit son voisin immédiat.

Certes, au cours de vos diverses tentatives, vous avez rencontré une exception à cette dernière règle, car il vous est arrivé de descendre ou de monter les anneaux 1 et 2 simultanément, mais vous avez pu noter que c'était là le seul groupe d'anneaux jouissant de ce privilège. A la vérité, lorsqu'on utilise systématiquement cette manœuvre simultanée des deux premiers anneaux, la marche du jeu est plus rapide. On la dit accélérée.

Quoi qu'il en soit le problème général s'énonce ainsi : étant donné deux configurations arbitraires des anneaux sur la navette d'un baguenaudier comportant autant d'anneaux que voulu, il s'agit de déterminer l'ordre et le nombre minimal de déplacements nécessaires pour passer d'une configuration à une autre. En particulier les configurations initiale et finale peuvent être respectivement celles du baguenaudier entièrement monté et entièrement démonté ou vice versa.

Pour résoudre ce problème nous allons nous aider de deux sorobans identiques réduits à leur seule partie « ciel ». Nous en appellerons à la partie « ciel » du premier boulier, dit boulier des configurations, pour représenter les différentes phases du jeu, une boule montée (resp. près de la lectrice) figurant un anneau monté (resp. baissé), tandis que nous transcrirons sur la partie « ciel » du second boulier, dit boulier des descripteurs, la configuration du premier avec les conventions d'écriture suivantes. A la première boule rencontrée montée sur le boulier des configurations, en allant naturellement de gauche à droite, on associe une première boule montée de même rang au boulier des descripteurs, puis, continuant à passer en revue les boules montées du premier soroban, on leur fait correspondre alternativement une boule baissée, une boule levée du second boulier, sans s'occuper aucunement dans cette alternance des boules baissées du premier boulier, mais en respectant le rang de chaque boule. Quant aux boules baissées du boulier des configurations, on leur associe des boules montées ou baissées de même rang du boulier des descripteurs, selon que ces dernières se trouvent à la suite d'une boule montée ou baissée sur ce même boulier.

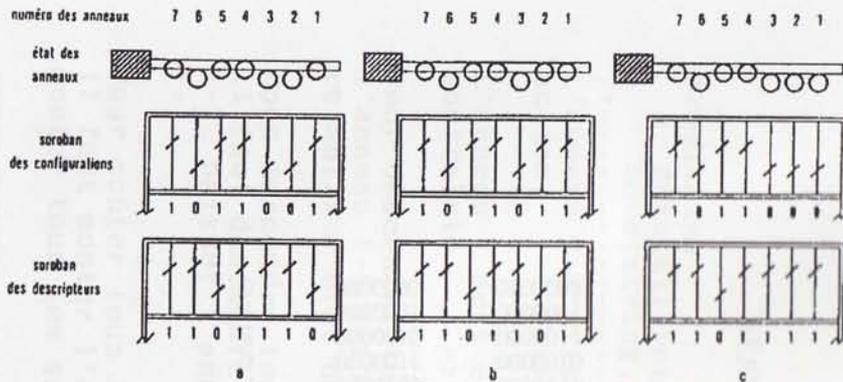


Fig. 1,8. Détermination du mouvement suivant.

Pour mieux comprendre l'application et le sens de toutes ces règles et conventions, référons-nous à la figure 1,8 qui exhibe en a une configuration arbitraire du baguenaudier avec le descripteur correspondant dont on a explicité la valeur binaire, car nul besoin d'insister davantage pour qu'on reconnaisse en cette notation du baguenaudier une description des configurations à l'aide de nombres écrits dans le système de numération dyadique. Les deux configurations possibles auxquelles on peut passer à partir de cette configuration initiale s'obtiennent en vertu des règles énoncées sur tout changement d'état d'un anneau, soit en élevant l'anneau 2, soit en baissant l'anneau 1, ce qui donne les configurations et descripteurs b et c. En c le descripteur a été incrémenté d'une unité, en b il a été, au contraire, décrémenté d'une unité.

Il en est ainsi de toute configuration. Par conséquent, la marche ordinaire du baguenaudier répond exactement à la formation successive des descripteurs binaires à partir du descripteur initial qui représente la configuration de départ, jusqu'à atteindre celui de la configuration finale. Le nombre minimal de déplacements nécessaires pour passer de la première configuration à l'autre se calcule aisément en faisant la différence des descripteurs correspondants. De même il est facile de voir que le nombre minimal de coups dans la marche complète du baguenaudier de sept anneaux que nous avons considéré jusque-là s'établit à 85, et, d'une manière générale, si le baguenaudier comporte n anneaux, le nombre de déplacements nécessaires, N_n , s'écrit sous la forme

$$N_n = \varepsilon \left(\frac{1}{3} 2^{n+1} \right), \quad (1,34)$$

où ε () désigne la partie entière de l'expression entre parenthèses, la relation ci-dessus résultant de la sommation convenablement définie des puissances paires ou impaires de 2.

Les conventions faites pour mettre à jour le soroban des descripteurs en conformité avec celui des configurations nous conduisent à fonder l'interprétation d'un descripteur sur la remarque suivante : tout anneau levé, donc toute boule montée du premier soroban, celui des configurations, implique pour la boule associée du deuxième soroban une position différente de celle de sa voisine de gauche. Au contraire, tout anneau baissé, donc toute boule baissée du

premier soroban, implique que la boule associée du deuxième soroban ait même position que sa voisine de gauche.

Cette remarque nous suggère donc, pour un descripteur donné d , le schéma d'analyse indiqué par l'organigramme de la figure 1,9 où d_i désigne le bit du descripteur de poids i , $i = n - 1$ étant l'ordre le plus élevé si ce descripteur correspond à un baguenaudier comportant n anneaux, et où c_i représente le bit de poids i du nombre binaire c affiché sur le soroban des configurations, $c_i = 1$ indiquant que l'anneau $i + 1$ est levé, ce qui est noté $A_{i+1} : L$, $c_i = 0$ montrant le contraire, ce qui est noté $A_{i+1} : B$.

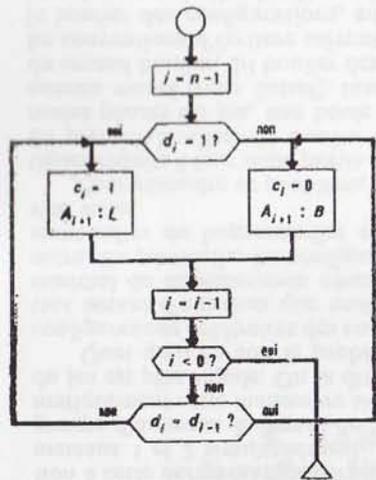


Fig. 1,9. Analyse de descripteur d .

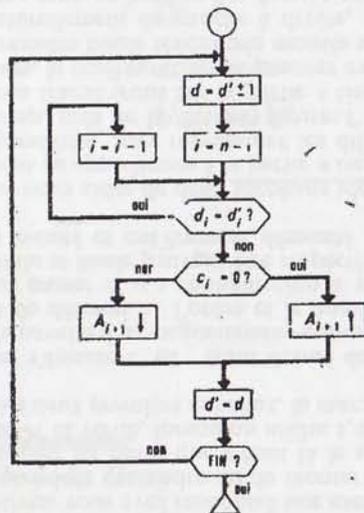


Fig. 1,10. Détermination de l'anneau à déplacer.

Ce schéma d'analyse du descripteur nous permet de déterminer directement, à partir d'une configuration donnée, celle qu'aura prise le baguenaudier après un nombre connu de coups. Par exemple, en prenant pour configuration initiale celle du baguenaudier entièrement monté, ce qui correspond au descripteur 1010101, la configuration finale, après 27 coups, sera conforme à l'interprétation du descripteur 1101110, soit $c = 1011001$, ou encore anneaux 7, 5, 4, 1 montés et anneaux 6, 3, 2 baissés.

Mais nous avons pu écrire, quelques lignes plus haut, que la marche ordinaire du baguenaudier répondait exactement à la formation des descripteurs binaires successifs. Dès lors l'algorithme qui nous permet de décider de l'anneau à déplacer pour nous rapprocher d'un pas de la configuration à laquelle nous voulons aboutir tient dans le changement de profil du descripteur lors de son incrémentation ou de sa décrémentation selon qu'on monte ou démonte le baguenaudier. L'organigramme correspondant est donné à la figure 1,10 où d' désigne le descripteur antérieur et d le nouveau descripteur. L'anneau à déplacer est noté $A_{i+1} \uparrow$ ou $A_{i+1} \downarrow$ selon qu'il doit être monté ou descendu.

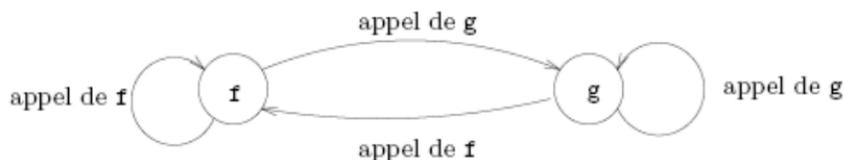
Que le lecteur remplace maintenant les parties « ciel » des deux sorobans par des registres électroniques en les habitant par les circuits logiques et autres qu'un ordinateur comporte généralement pour les servir, et il sera à même de confier la marche du baguenaudier à la machine quels que soient les circonstances et le nombre d'anneaux pourvu que ce dernier demeure raisonnable. Qu'il prenne soin cependant de mettre à profit le fait qu'un ordinateur travaille en binaire. Reste à habiller les squelettes d'organigrammes présentés et à les transformer en programme.

Ceci dit, écrivons en regard l'une de l'autre la suite des descripteurs et celle des configurations en prenant pour point de départ descripteur et configuration correspondant au baguenaudier monté. Nous obtenons la liste ci-après écrite en partie seulement :

85	1010101	1111111
84	1010100	1111110
83	1010011	1111101
82	1010010	1111100
81	1010001	1111001
80	1010000	1111000
79	1001111	1101000
78	1001110	1101001
77	1001101	1101011
76	1001100	1101010
...
42	0101010	0111111
41	0101001	0111110
40	0101000	0111100
39	0100111	0110100
38	0100110	0110101
37	0100101	0110111
...
10	0001010	0001111
9	0001001	0001110
8	0001000	0001100
7	0000111	0000100
6	0000110	0000101
5	0000101	0000111
4	0000100	0000110
3	0000011	0000010
2	0000010	0000011
1	0000001	0000001
0	0000000	0000000

Ce problème est intéressant d'un point de vue informatique car une solution simple en est donnée en utilisant une récursion croisée. Une fonction f y est définie en appelant f elle-même et une fonction g alors que cette fonction g est définie en fonction d'elle-même et de la fonction f .

La figure suivante illustre le graphe des appels correspondant à cette situation :



Le baguenaudier est un curieux appareil d'origine chinoise, appelé aussi « anneaux chinois » ou « anneaux de Cardan », dont l'invention remonte aux années 200. Il est formé d'un jeu d'anneaux qu'il faut enfiler puis retirer, dans un certain ordre, sur un morceau d'os ou de métal plat, percé de trous dans chacun desquels se trouve un fil de fer. Une des extrémités de chaque tige est attachée à un anneau et l'autre se termine par une tête qui empêche la tige de s'échapper du trou.



Jeu du BAGUENAUDIER*predicates*

```

desc_all(integer)   mont_all(integer)
move(string,integer) action(string,integer)

```

```

/*-----
L'anneau 0 n'existe pas donc ne genere aucune
action.          => desc_all(0)   mont_all(0)

```

```

L'anneau 1 peut etre descendu ou monte sans
contrainte.     => desc_all(1)   mont_all(1)

```

```

Pour descendre (monter) l'anneau I il faut monter
l'anneau I-1 avant, puis le baisser apres pour
retablir l'etat de I-1.          => predicat move

```

```

Pour descendre tous les anneaux jusqu'au rang I
il faut descendre tous les anneaux jusqu'au rang
I-2, baisser l'anneau I puis descendre l'anneau
I-1.          => desc_all(I)

```

```

Pour monter tous les anneaux jusqu'au rang I
il faut monter l'anneau I-1, lever l'anneau I puis
monter tous les anneaux jusqu'au rang I-2.
          => mont_all(I)

```

```

-----*/
goal      write("Entrer le nombre d'anneaux: "),
          readint(N),desc_all(N).

```

clauses

```

move(_,0) :- !.

```

```

move(Action,I) :- J = I - 1,
                  move("haut",J),
                  action(Action,I),
                  move("bas ",J).

```

```

desc_all(0) :- !.

```

```

desc_all(1) :- action("bas ",1),!.

```

```

desc_all(I) :- J = I - 1,K = I - 2,
              desc_all(K),
              action("bas ",I),
              move("bas ",J).

```

```

mont_all(0) :- !.

```

```

mont_all(1) :- action("haut",1),!.

```

```

mont_all(I) :- J = I - 1,K = I - 2,
              move("haut",J),
              action("haut",I),
              mont_all(K).

```

```

action(Action,I):- write(Action," : ",I),nl.

```

```

/*-----*/

```

Jeu du BAGUENAUDIER

Entrer le nombre d'anneaux: 5

bas : 1
 bas : 3
 haut : 1
 bas : 2
 bas : 1
 bas : 5
 haut : 1
 haut : 2
 bas : 1
 haut : 3
 haut : 1
 bas : 2
 bas : 1
 bas : 4
 haut : 1
 haut : 2
 bas : 1
 bas : 3
 haut : 1
 bas : 2
 bas : 1

$$\text{Nombre coups} = E\left(\frac{2^{n+1}}{3}\right)$$

=> pour n=5 : 21

pour n=7 : 85

<i>Pas</i>	<i>Etat</i>	<i>mouv.</i>	<i>Pas</i>	<i>Etat</i>	<i>mouv.</i>
1	1	↓1	30	83	↑4
2	5	↓3	31	82	↑1
3	4	↑1	32	80	↑2
4	6	↓2	33	81	↓1
5	7	↓1	34	85	↓3
6	23	↓5	35	84	↑1
7	22	↑1	36	86	↓2
8	20	↑2	37	87	↓1
9	21	↓1	38	71	↑5
10	17	↑3	39	70	↑1
11	16	↑1	40	68	↑2
12	18	↓2	41	69	↓1
13	19	↓1	42	65	↑3
14	27	↓4	43	64	↑1
15	26	↑1	44	66	↓2
16	24	↑2	45	67	↓1
17	25	↓1	46	75	↓4
18	29	↓3	47	74	↑1
19	28	↑1	48	72	↑2
20	30	↓2	49	73	↓1
21	31	↓1	50	77	↓3
22	95	↓7	51	76	↑1
23	94	↑1	52	78	↓2
24	92	↑2	53	79	↓1
25	93	↓1	54	111	↓6
26	89	↑3	55	110	↑1
27	88	↑1	56	108	↑2
28	90	↓2	57	109	↓1
29	91	↓1	58	105	↑3

<i>Pas</i>	<i>Etat</i>	<i>mouv.</i>
59	104	↑1
60	106	↓2
61	107	↓1
62	99	↑4
63	98	↑1
64	96	↑2
65	97	↓1
66	101	↓3
67	100	↑1
68	102	↓2
69	103	↓1
70	119	↓5
71	118	↑1
72	116	↑2
73	117	↓1
74	113	↑3
75	112	↑1
76	114	↓2
77	115	↓1
78	123	↓4
79	122	↑1
80	120	↑2
81	121	↓1
82	125	↓3
83	124	↑1
84	126	↓2
85	127	↓1